

# APPLICATION DE LA TRANSFORMATION CONFORME A L'ETUDE ANALOGIQUE DE L'ECHAUFFEMENT DES CORPS DE RENTREE

P. SULMONT\* et J. GENOT†

(Reçu le 15 novembre 1965)

**Résumé**—Une nouvelle méthode permet, d'une manière rigoureuse, la représentation analogique d'un domaine thermique aux frontières quelconques par un réseau de résistances de forme rectangulaire. La mise en oeuvre de la transformation conforme conduisant à cette simplification est exposée en détail sur des exemples typiques.

## AVANT-PROPOS

LA SOLUTION par analogie rhéoélectrique et en particulier par l'emploi des réseaux résistifs de nombreux problèmes thermiques (échauffement transitoire de disques de turbine, de têtes d'engins etc. . . . détermination de la température d'équilibre d'obstacles soumis à des flux de convection et de rayonnement etc. . . .) est rendue difficile par la nécessité d'imposer des conditions aux limites sur des contours qui ne sont pas limités par des segments parallèles aux axes de coordonnées, c'est-à-dire pour lesquels il faut effectuer des interpolations compliquées entre les valeurs relevées ou imposées sur des nœuds.

Suivant une suggestion de M. Malavard, on est alors naturellement conduit à envisager la transformation conforme du contour de l'obstacle, afin de le ramener sur un rectangle, quitte à introduire aux points convenables de ce contour, les singularités éventuelles nécessitées par la non-conservation des angles en certains points des contours initial et final. Cette méthode dans laquelle la transformation conforme simplifie la forme de l'obstacle mais complique quelque peu l'équation elle-même, est valable chaque fois que l'équation transformée reste susceptible d'une représentation analogique par réseau rhéoélectrique. Ce sera le cas des équations de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \lambda(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \lambda(x_1, x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right] = F(\varphi, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_t, x_1, x_2)$$

qui se transforment évidemment en :

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[ A(X_1, X_2) \frac{\partial \varphi}{\partial X_1} \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ A(X_1, X_2) \frac{\partial \varphi}{\partial X_2} \right] = \frac{1}{\mu^2} F(\varphi, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_t, x_1, x_2)$$

où  $\mu(X_1, X_2)$  est le module de la transformation utilisée. Trop souvent perdue de vue, l'exploitation de cette transformation est pourtant avantageuse lorsque, dans des résolutions numériques ou analogiques par méthode de différences finies, on rencontre des difficultés pour tenir compte des conditions aux limites avec des mailles tronquées. Les exemples traités ci-dessous montrent la facilité d'application de cette méthode.

J. J. BERNARD‡

\* Centre National de la Recherche Scientifique (Centre de Calcul analogique), Châtillon-sous-Bagneux (Seine).

† Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, Châtillon-sous-Bagneux (Seine).

‡ Collège Scientifique Universitaire, Le Mans.

## NOTATIONS

$c_p \rho$ ,	chaleur volumique;
$h$ ,	coefficient de convection;
$H$ ,	hauteur du liquide conducteur;
$K$ ,	constante analogique;
$n$ ,	normale dans le plan réel;
$N$ ,	normale dans le plan transformé;
$r$ ,	coordonnée radiale;
$R$ ,	résistivité du liquide conducteur;
$t$ ,	temps;
$T$ ,	température;
$V$ ,	potentiel électrique;
$x_{1,2,3}$ ,	coordonnées cartésiennes dans le plan réel;
$X_{1,2,3}$ ,	coordonnées cartésiennes dans le plan transformé;
$z$ ,	variable complexe dans le plan réel;
$Z$ ,	variable complexe dans le plan transformé.

## Symboles grecs

$\alpha$ ,	angle de l'axe et de la tangente au contour;
$\varepsilon$ ,	largeur d'une électrode;
$\theta$ ,	angle polaire;
$\lambda$ ,	coefficient de conductibilité thermique;
$A$ ,	$\log \mu$ ;
$\mu$ ,	module de la transformation conforme;
$\rho$ ,	masse volumique;
$\sigma$ ,	abscisse curviligne du contour.

## 1. GENERALITES

L'UTILISATION de l'analogie électrique pour définir des champs instationnaires de températures est devenue une pratique courante qui met en oeuvre des techniques variées [1-6]. Dans la plupart des cas, l'équation de la chaleur est étudiée sous la forme correspondant aux coordonnées cartésiennes ou cylindriques; les conditions aux limites ne peuvent alors être imposées que sur des contours lentement évolutifs car seule une frontière constituée par des lignes coordonnées ou des lignes s'en écartant

peu, permet d'éviter des corrections laborieuses et parfois divergentes.

Le problème des corps de rentrée, qui présentent une forme toujours plus ou moins émoussée, doit naturellement être abordé au moyen de coordonnées sphériques; la résolution d'un tel problème, relatif à un hémisphère très peu évidé a été présentée dans un récent article de la Recherche Aérospatiale [5]. En pratique les problèmes d'échauffement cinétique des corps de rentrée comportent rarement des configurations aussi favorables; la difficulté principale ne vient pas de la forme géométrique: bien que sphérique sur une petite portion seulement de la tête, elle ne conduit pas, en général, à des corrections trop importantes; la zone difficile se trouve en fait au raccord de la tête avec la partie cylindrique du corps de rentrée. Le transfert de chaleur de la tête vers la paroi de l'engin, qui s'effectue à travers cette section n'est généralement pas négligeable et il n'est pas avantageux de la réduire car il en résulterait une discontinuité indésirable de température. D'autre part, les coordonnées sphériques sont mal adaptées à l'expression des conditions aux limites sur la partie cylindrique et il y aurait donc lieu d'étudier conjointement deux domaines reliés par les conditions de continuité thermique.

Soient  $Ox_1$  l'axe de symétrie de révolution de l'engin,  $r, \theta$  les coordonnées polaires d'un point  $M$  et  $Ox_2$  un axe perpendiculaire à  $Ox_1$  dans un plan méridien (Fig. 1).

Sur la partie AB la température  $T(r, \theta, t)$  à l'instant  $t$ , en un point  $M(r, \theta)$  d'un matériau conducteur de conductibilité  $\lambda$  et de chaleur volumique  $c_p \rho$  est définie par l'équation:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t};$$

sur la partie BC l'équation correspondante écrite en coordonnées cylindriques est:

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} = c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t};$$

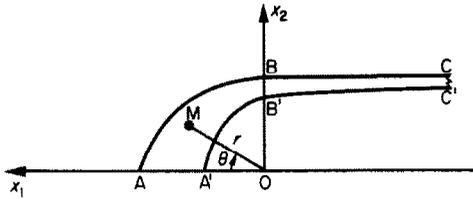


FIG. 1.

la continuité thermique, entre les deux parties, s'exprime enfin pour  $\theta = \pi/2, x_1 = 0, x_2 = r$ , par

$$T[x_1, (\pi/2), t] = T(x_1, 0, t)$$

et

$$\left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_{r, (\pi/2), t} = - \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)_{r, 0, t}$$

L'application analogique de cette méthode comporte cependant des inconvénients notables : les calculs des résistances dans ces systèmes de coordonnées sont en général plus compliqués qu'en coordonnées cartésiennes et le voisinage des deux systèmes de coordonnées est un risque évident de confusion, et enfin la nécessité subsiste de faire des corrections de frontières lorsque les surfaces ne sont pas rigoureusement hémisphériques.

La transformation conforme de la méridienne sur un rectangle, dont la technique est présentée ci-après permet d'éviter presque totalement ces difficultés et se prête, en outre, aisément à l'étude de formes plus complexes, par exemple, de parois d'épaisseur évolutive.

**2. TRANSFORMATION CONFORME DU CONTOUR D'UN CORPS DE RENTREE**

La tête d'engin étudiée est supposée de révolution ainsi que la répartition des flux thermiques et la distribution des températures qui est donc donnée dans chaque plan méridien par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \lambda x_2 \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \lambda x_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = c_p \rho x_2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

les coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  correspondant respectivement à l'axe de révolution et à un axe perpendiculaire, cette équation peut encore s'écrire :

$$\text{Div} [\lambda x_2 \text{ grad } T(x_1, x_2)] = c_p \rho x_2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

et il s'agit de rechercher ce qu'elle devient lorsqu'on effectue une transformation conforme des coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(X_1, X_2) \\ x_2 &= x_2(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (3)$$

choisie de façon à faire correspondre au contour  $\Gamma$  de la méridienne un contour simple du plan  $X_1, X_2$  formé par deux segments parallèles aux axes de coordonnées.

Soit, alors, l'équation (2) écrite sous la forme générale

$$\text{Div} [f(x_1, x_2) \text{ grad } T(x_1, x_2)] = S(x_1, x_2)$$

ou encore en adoptant les conventions des indices muets :

$$f \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} = S(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2).$$

Si on fait subir aux coordonnées  $x_i$  la transformation conforme (3), l'équation (4) devient

$$\begin{aligned} f \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial X_j \partial X_k} \cdot \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial X_j} \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial x_i} \right] \\ + \frac{\partial f}{\partial X_k} \cdot \frac{\partial T}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = S \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \\ k = 1, 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Puisque les  $X_j$  sont harmoniques donc

$$\frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \cdot \partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \mu^2 \delta_{ik} \quad \begin{aligned} i = k &\Rightarrow \delta_{jk} = 1 \\ j \neq k &\Rightarrow \delta_{jk} = 0 \end{aligned}$$

$\mu^2$  étant le module de la transformation con-

forme, l'équation transformée s'écrit en définitive:

$$\mu^2 \left[ f \frac{\partial^2 T}{\partial X_j \cdot \partial X_j} + \frac{\partial f}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial T}{\partial X_j} \right] = S \Rightarrow \mu^2 \text{Div} [f \text{grad } T] = S,$$

ou encore dans le cas particulier de l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \lambda x_2(X_1, X_2) \frac{\partial T}{\partial X_1} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ \lambda x_2(X_1, X_2) \frac{\partial T}{\partial X_2} \right] \\ = \frac{c_p \rho}{\mu^2} x_2(X_1, X_2) \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (5) \end{aligned}$$

On constate que cette équation ne change pas la forme générale de l'équation primitive (1) et que toute représentation analogique de (1) peut être conservée pour (5) à condition seulement de remplacer, dans les nouvelles coordonnées, la chaleur volumique  $c_p \rho$  par une valeur apparente  $c_p \rho / \mu^2$  variable d'un point à un autre du domaine.

Considérons ensuite les conditions aux limites sur une portion d'un contour quelconque  $\Gamma$  transformée en un segment parallèle à la dérivée normale dans le plan méridien de l'obstacle,  $\partial T / \partial n$  devient avec les nouvelles variables:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial X_1}{\partial N} \frac{\partial T}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial N} \frac{\partial T}{\partial X_2},$$

où  $(\partial X_1 / \partial N) = 0$  puisque  $X_2$  conjuguée de  $X_1$  est constant sur le contour et où  $(\partial X_2 / \partial N) = \mu$ , ce qui entraîne finalement:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \mu \frac{\partial T}{\partial X_2}.$$

Ainsi, par exemple, la condition de Fourier sur le contour  $\Gamma$  d'un obstacle soumis à un flux

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(\bar{T} - T)$$

où  $h$  est le coefficient local de convection et  $\bar{T}$  la température de paroi athermane, se transpose

aisément en une condition aux limites sur le segment de droit  $X_2$ .

Le problème consiste donc à déterminer les fonctions  $X_1$ ,  $X_2$  et  $\mu$  qui permettent d'effectuer la transformation conforme du profil quelconque de la tête d'un engin en un rectangle facilement représenté au moyen d'un réseau de résistances.

### 3. ETUDE DE L'ECHAUFFEMENT D'UN CORPS PLEIN

Dans le cas d'un corps plein, le principe de la détermination des éléments d'une transformation conforme au moyen d'analogies électriques du contour de la surface méridienne du corps sur un rectangle a été donné dans la thèse de G. Renard [7]. Dans le cas particulier d'ogive-cylindre (Fig. 2), les quatre tronçons OA, AB, BD, DO sont appliqués sur les quatre côtés du rectangle  $O' A' B' D'$ .

La cuve rhéoelectrique construite pour définir cette transformation est formée d'un long canal

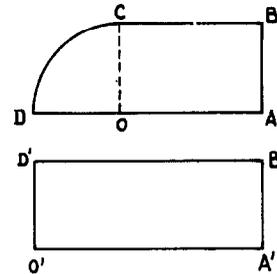


FIG. 2.

de plexiglas fermé à une extrémité et dont l'autre extrémité peut recevoir des têtes de formes différentes.

Dans le cas correspondant à l'exemple traité, où OCD est un quart de cercle, la seule singularité au point O subsiste, il n'en existe pas en D.

Dans une première expérience, deux électrodes ont été placées suivant DCB et OA. Une différence de potentiel arbitraire 0,100 est établie entre ces deux électrodes; ce qui permet de relever dans la cuve le champ d'équipotentiels correspondant aux lignes  $X_2 = \text{constante}$ .

Dans une deuxième expérience deux électrodes ont été placées, l'une suivant OD, l'autre sur une plaquette mobile A'' B'' parallèle à AB; en effet, le champ n'est plus uniforme sur toute la longueur OA mais seulement au voisinage de AB: sur les équipotentielles, la valeur constante de  $X_1$  (proportionnelle au potentiel) n'est plus proportionnelle à  $x_1$ ; on déplace donc A'' B'' dans la région uniforme jusqu'à ce qu'une différence de potentiel 10 s'établisse entre A'' B'' et une parallèle distante de 10 cm et on associe à la différence de potentiel 10 la variation 0,5 de  $X_1$  qui conserve le même rapport d'échelle entre A'B'/AB et O'A'/OA. Au maillage formé par la superposition des deux champs qui viennent d'être relevés et gradués (Fig. 3) correspond alors un maillage restangulaire dans le plan  $X_1, X_2$ . Il y a correspondance uniforme entre les noeuds de ces deux maillages, le tracé étant choisi de façon à ce que le domaine soit exploré le plus régulièrement possible.

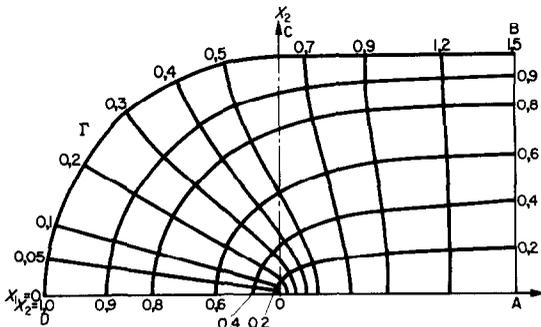


FIG. 3.

La détermination du module  $\mu$  de la transformation conforme en chaque noeud du maillage tracé précédemment peut également s'effectuer par analogie dans une troisième expérience. En effet soit  $z$  et  $Z$  tels que

$$z = x_1 + i x_2$$

$$\text{et } Z = X_1 + i X_2$$

on aura

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + i \frac{\partial X_2}{\partial x_1} = \mu e^{i\theta} \quad (6)$$

où  $\theta$  est défini par la relation suivante:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial X_2}{\partial x_1} / \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \quad (7)$$

Posant alors  $\Lambda = \log \mu$ , on peut encore écrire

$$\log \frac{dZ}{dz} = \Lambda + i\theta$$

$\Lambda$  et  $\theta$  étant harmoniques et conjuguées la fonction  $\Lambda$  peut donc être déterminée au moyen de la cuve déjà utilisée pour  $X_1$  et  $X_2$  mais avec les conditions aux limites suivantes (Fig. 4): sur OA la condition  $\partial X_2 / \partial x_1 = 0$  entraîne d'après (7)  $\theta = 0$  donc  $\partial \Lambda / \partial n = \partial \Lambda / \partial X_2 = 0$ , la paroi OA est isolante. Pour des raisons analogues AB, BC et OD sont également des parois isolantes. Sur le contour  $\Gamma$  on sait que:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial N} = - \frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$$

où  $\sigma$  est l'abscisse curviligne de la ligne méridienne  $y = f(x)$ , comptée à partir du point C.

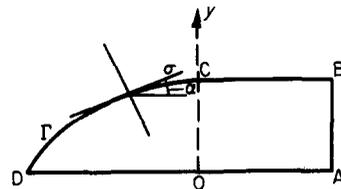


FIG. 4.

Par ailleurs, sachant que  $\partial X_i / \partial N = 0$  sur le contour  $\Gamma$ , il vient

$$\frac{\partial X_1}{\partial N} = \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \cos \alpha - \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \sin \alpha;$$

soit d'après (7)  $\theta = \pi/2 - \alpha$

et par conséquent

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial N} = \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma}$$

Dans le cas particulier qui a été choisi pour exemple, où le contour  $\Gamma$  est un quart de cercle ( $\partial \alpha / \partial \sigma = 1$ ) ce qui conduit à  $(\partial \Lambda / \partial N) = 1$ , la

dérivée normale de  $A$  est donc constante sur CD. Sur cet exemple sera exposé le procédé électrique qui permet de déterminer  $\mu$  (Fig. 5). Puisque  $\partial A/\partial n$  est constant, il faut injecter en chaque point de  $\Gamma$  une intensité constante, ce qui se réalise facilement en disposant de petites électrodes sur ce contour. La singularité logarithmique en O où l'argument passe de  $\pi/2$  à 0 est matérialisée par un demi-cylindre, conducteur, de 5 mm de rayon, appliqué en ce point contre la paroi. L'alimentation de la cuve est schématisée sur la Fig. 5, des réglages

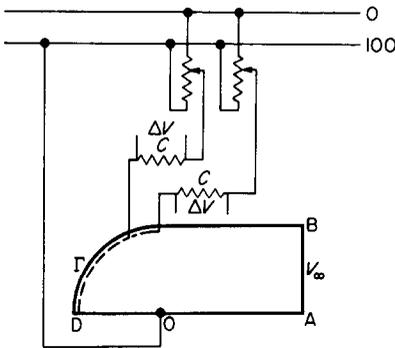


FIG. 5.

successifs des potentiomètres permettent d'établir une différence de potentiel constante aux bornes des conductances  $C$ . Si  $V$  est le potentiel électrique, liée par la constante analogique  $K$  à  $A$ ; en chaque point du contour on a :

$$A = KV.$$

et par conséquent

$$\frac{\partial A}{\partial n} = K \frac{\partial V}{\partial n} = K \frac{RC}{H\varepsilon} \Delta V = 1$$

d'où l'on tire la valeur de  $K$ ,  $H$  étant la hauteur d'eau en cm,  $\varepsilon$  la largeur relative de l'électrode et  $R$  la résistivité du conducteur en ohm-cm. Dans la région non perturbée, voisine de AB, le module  $\mu$  est égal à 1, il en résulte que  $\log \mu = K(V - V_\infty)$  et on détermine le signe  $V - V_\infty$  en remarquant que  $\mu$  devient très grand au voisinage du point O.

Ainsi, se trouve définie la valeur de  $\mu$  en chaque noeud du maillage; les lignes isomodules ont été reportées sur la Fig. 6, elles donnent l'allure générale des variations de  $\mu$ .

#### 4. APPLICATION DE L'ECHAUFFEMENT CINÉTIQUE D'UN CORPS PLEIN

Lorsque la correspondance entre les points homologues des plans  $(x_1, x_2)$  et  $(X_1, X_2)$  est connue et la valeur de  $\mu$  déterminée en chaque point, la représentation par un réseau analogique rectangulaire constitué de résistances pures de l'équation.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \lambda x_2 \frac{\partial T}{\partial X_1} \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \lambda x_2 \frac{\partial T}{\partial X_1} \right) \\ = \frac{c_p \rho}{\mu^2} x_2 \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

n'offre plus de difficultés spéciales. La méthode d'utilisation du réseau en régime transitoire qui est une méthode de pas à pas a été décrite (8) et maintes fois utilisée. Les résistances sont faciles à calculer puisque tout le maillage reste rectangulaire et que les frontières du domaine thermique sont ramenées à des lignes rectilignes. Les conditions aux limites sur un contour quelconque deviennent des conditions aux limites sur une ligne de noeuds du réseau rectangulaire comme nous venons de le montrer au paragraphe 2.

Il est important de remarquer au sujet de l'étude de l'échauffement cinétique d'une tête d'engin qu'il est impératif, au risque de fausser tous les résultats, de tenir compte des pertes par rayonnement superficiel dès que le niveau de température dépasse l'ordre de  $1000^\circ \text{C}$ . Rappelons que ces pertes thermiques sont représentées dans le système analogique actuel par un débit de courant à travers une résistance dont le calcul se trouve également simplifié du fait que les frontières extérieures sont ramenées à des lignes rectilignes. Ajoutons que la méthode utilisée pour représenter le rayonnement est dite "méthode des grandes résistances" et a été décrite et mise en oeuvre dans les références [8, 4 et 9]. Le calcul des varistances se trouve

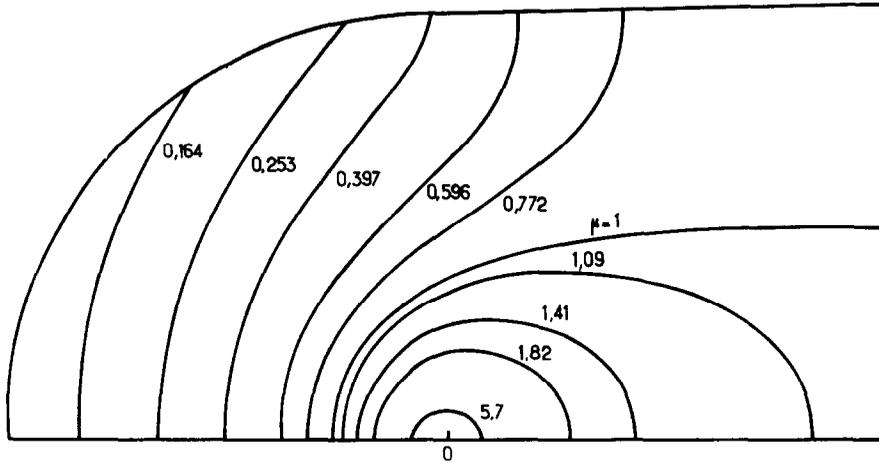


FIG. 6. Champ des lignes isomodules.

également simplifié lorsque l'on est amené à les utiliser dans un problème de rayonnement [10].

Nous avons traité par cette méthode un exemple très simplifié de l'échauffement cinétique de la maquette hémisphère-cylindre étudiée ci-dessus et constituée d'un matériau dont les caractéristiques thermiques sont les suivantes :

conductivité thermique

$$\lambda = 0,53 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{degC}^{-1},$$

diffusivité thermique

$$\frac{\lambda}{c_p \rho} = 16 \cdot 10^{-8} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1},$$

et soumise à un flux de convection

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h(\bar{T} - T),$$

sur son contour extérieur, avec une température de paroi athermane  $\bar{T}$  constante et un coefficient de convection  $h$  donné par le Tableau 1 en fonction de l'angle  $\theta'$  d'un rayon de la tête

sphérique avec l'axe de la maquette (la valeur,  $h_0$ , de référence, correspond au point d'arrêt); sur la partie cylindrique de la maquette  $h$  est supposé constant et égal, par continuité, à  $0,03 h_0$ .

Les répartitions des températures pour différents temps sont reportées sur la Fig. 7, à l'instant initial ( $t = 0$ ) la température a été supposée uniforme et égale à zéro. Le choix d'un exemple aussi simple que celui d'une maquette hémisphère-cylindre se justifie par le fait que nous avons voulu effectuer une comparaison rigoureuse de cette nouvelle méthode avec les méthodes classiques utilisées jusqu'ici. Pour cela, parallèlement à ces déterminations utilisant la transformation conforme, deux autres déterminations, dans des conditions identiques, ont été effectuées en construisant un réseau à partir des coordonnées cartésiennes d'une part, et un réseau en coordonnées sphériques d'autre part. Le schéma de ces réseaux est donné sur les Fig. 8 et 8 bis.

En coordonnées cartésiennes, la représentation de la partie circulaire de la frontière par

Tableau 1

$\theta'$ (°)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$h/h_0$	1	0,98	0,92	0,82	0,69	0,54	0,38	0,23	0,11	0,03

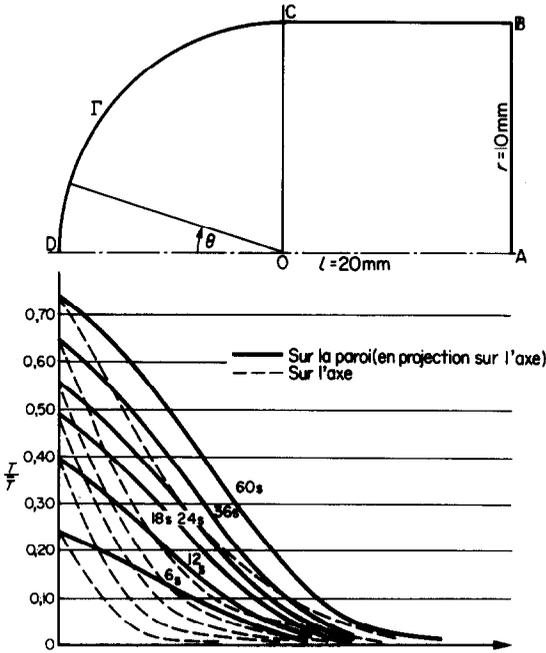


FIG. 7. Répartition de température.

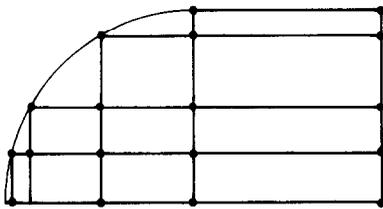


FIG. 8. Réseau en coordonnées cartésiennes.

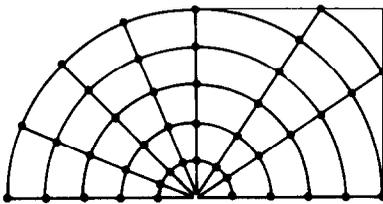


FIG. 8bis. Réseau en coordonnées sphériques.

des escaliers successifs (malgré toutes les corrections qui ont été effectuées pour tenir compte de la courbure) conduit à des erreurs grossières pouvant dépasser 50% dans les premiers instants (Fig. 9).

En coordonnées sphériques, la partie circulaire est bien représentée mais il y a une divergence sur la partie cylindrique qui à l'inverse de la méthode précédente s'aggrave avec le temps.

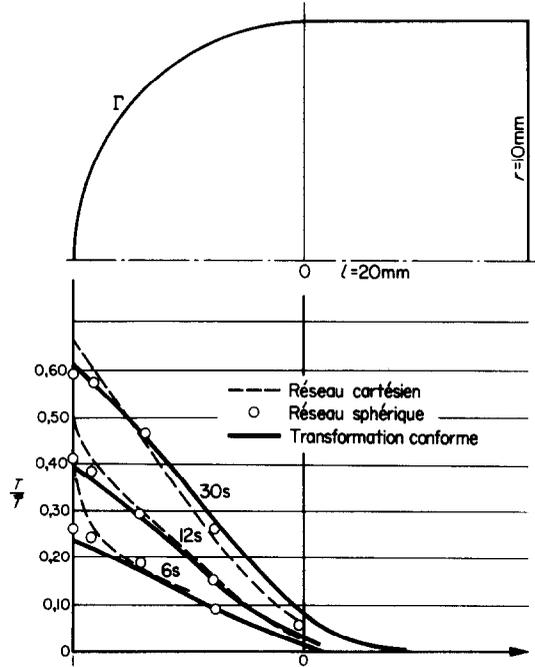


FIG. 9. Répartition de température sur la surface.

Ces divergences seraient évidemment encore plus importantes si la surface n'était plus sphérique et dans de tels cas seule la transformation conforme permettrait une précision suffisante.

La méthode précédente permet également d'appliquer par transformation conforme à l'intérieur de la méridienne d'un corps creux tel que l'aire ODCBA du plan  $x_1, x_2$  (Fig. 10) sur un rectangle du plan  $X_1, X_2$ ; on remarquera que si les tangentes en O et en D sont normales à l'axe  $Ox_1$ , il n'existe aucun point singulier. La



FIG. 10.

transformation conforme qui vient de servir aux déterminations précédentes permet de représenter des profils du genre de celui de la Fig. 10 et définis à partir de l'hémisphère-cylindre, limités par deux courbes correspondant à deux valeurs constantes de  $X_2$  comprises entre 0 et 1. Ainsi a été traité, à titre d'exemple, le cas d'une maquette creuse, d'épaisseur évolutive dont le profil est constitué par la courbe  $X_2 = 1$  (hémisphère cylindre) et la courbe  $X_2 = 0,8$

sujet d'un corps plein, et il semble que l'utilisation de la transformation conforme soit ici le seul moyen d'obtenir des résultats satisfaisants.

### 5. CONCLUSION

Les résultats précédents ont mis en évidence les simplifications et les précisions auxquelles conduit l'application de la transformation conforme à l'étude de l'échauffement cinétique d'une maquette pleine ou creuse. L'utilisation de cette méthode nouvelle trouve son plein intérêt lorsque les frontières du domaine thermique considéré sont quelconques et que les conditions aux limites deviennent compliquées. Seule, son application au domaine thermique ayant retenu notre attention, la méthode n'en garde pas moins toute sa généralité, elle pourra ainsi conduire, malgré les différentes déterminations analogiques qu'elle nécessite, à des simplifications et à des précisions qu'aucun autre procédé de calcul ne pourrait fournir.

### BIBLIOGRAPHIE

1. L. BEUKEN, Entwicklung des elektrischen Analogieverfahrens 3in Analyse nichtstationärer Warmeströmungen in Europa und in den vereinigten Staaten. IV<sup>o</sup> Congrès International du Chauffage Industriel, communication 19, Paris (1952).
2. G. LIEBMAN, Solution of transient heat transfer problems by the resistance network analog method, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **78**, 1267 (1956).
3. L. MALAVARD et Y. MIROUX, Sur quelques études d'analogies électriques relatives à des problèmes de transfert de chaleur, IV<sup>o</sup> Congrès International du Chauffage Industriel, communication 82, Paris (1952).
4. J. LABBE, Représentation électrique de champs thermiques par réseau de résistances, *Journées de la Transmission de la Chaleur*, Paris. 19-24 juin (1961).
5. M. ENSELME, Calcul des répartitions de températures dans un missile au cours de la rentrée dans l'atmosphère, *Rech. Aéropat.* **103**, 31 (1964).
6. A. D. KRAUS, *Extended Surfaces*. Cleaver Hume Press, London (1964).
7. G. RENARD, Représentation directe par analogie rhéologique des gradients de fonctions harmoniques en domaine plan limité ou illimité, *Publs Scient. Tech. Minist. Air*, N.T. 78 (1958).
8. P. HUARD DE LA MARRE, Résolution de problèmes d'infiltrations à surface libre au moyen d'analogies électriques, *Publs Scient. Tech. Minist. Air*, 340 (1958).
9. J. J. BERNARD, Essais d'échauffement cinétique en soufflerie, *Rech. Aéronaut.* **76**, 17 (1960).
10. J. GENOT et J. LABBE, Simulation par varistance du rayonnement thermique, *Rech. Aéropat.* **93**, 37 (1963).

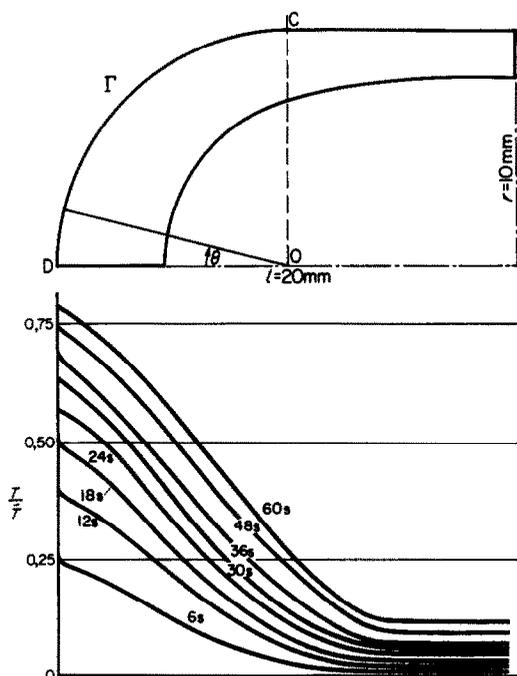


FIG. 11. Température sur le contour  $\Gamma$  (projection).

(Figs. 3 et 11). Les caractéristiques thermiques du matériau, les conditions initiales et de frontière sont les mêmes que pour l'exemple du corps plein, ajoutons que sur la face interne le flux de chaleur est supposé nul. Les répartitions de températures superficielles pour différents temps sont reportées sur la Fig. 11, l'influence de la conductivité thermique longitudinale se fait nettement sentir sur la partie cylindrique mince. Une représentation classique qui nécessiterait des profils en escaliers aggraverait encore les divergences que nous avons remarquées au

**Abstract**—The paper describes a new method which allows us to establish an analogy between a thermal conductor of arbitrary shape and a rectangular array of electrical resistances. The details of the conformal mapping which leads to such a simplification are explained with the aid of several typical examples.

**Zusammenfassung**—Eine neue Methode gestattet streng einen thermischen Bereich mit beliebigen Begrenzungen durch ein Netz rechtwinklig angeordneter Widerstände darzustellen. Die Anwendung der konformen Abbildung, die zu dieser Vereinfachung führt wird im einzelnen an typischen Beispielen gezeigt.

**Аннотация**—Новый метод позволяет любую гранцу тепловой области с помощью аналогии представить сетью сетью сопротивлений прямоугольной формы.

Применение конформного преобразования рассмотрено детально на типичных примерах.